

ДВИЖЕНИЕ ОДИНОЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В СДВИГОВОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

П.А. ТИТАРЕНКО, В.А. КУНИЧАН

Предложена теоретическая модель движения одиночной цилиндрической частицы в простом сдвиговом потоке вязкой жидкости. В модели учтена инерция частицы, что позволило объяснить некоторые экспериментально установленные явления вызванные влиянием массы.

Введение

Исследование поведения вытянутых твердых частиц имеет большое значение для широкой области технологических процессов, таких как переработка пульп в производствах бумаги, полимерных композитов, производствах армированных пластических масс и т.д.

Общее уравнение движения одиночного эллипсоида в ньютоновской жидкости впервые было получено в 1922 году Джеффри [1]. Обширное исследование решения данного уравнения проведено Фернандесом [2]. На данный момент так же осуществлен ряд численных решений уравнения Навье-Стокса применительно к вытянутой частице в сдвиговом потоке [3], однако в силу громоздкости и сложности такого подхода не удалось осуществить решение с учетом инерционности частиц. Таким образом, имеющиеся математические модели не могут быть использованы в ряде случаев, таких как движение волокон в сепараторах и гидроциклонах, движение массивных частиц [4]. Так же в рамках существующих моделей не может быть объяснено описанное в работе [5] явление смещения наибольшей вероятности положения частицы от направления вдоль течения потока.

Теоретическая модель

Цилиндрическая частица находится в сдвиговом потоке вязкой жидкости плотности ρ и вязкости μ . Для упрощения задачи движение частицы считается двухмерным, поле скоростей потока постоянным, а отношение половины длины частицы (стержня) к ее диаметру много больше единицы $r = L/d, r \gg 1$. В системе координат, движущейся вместе с центром масс стержня, он вращается вокруг своей оси под действием сдвигового потока симметричного относительно начала координат (Рис.1).

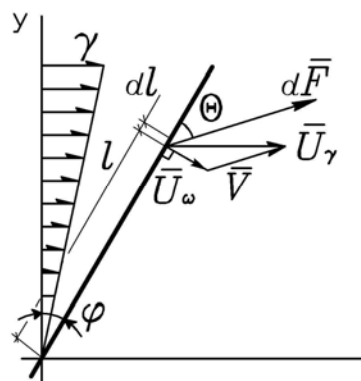


Рис.1

На удалении l от центра скорость сдвигового потока равна

$$\vec{U}_\gamma = \vec{e}_x \cdot \gamma \cdot l \cdot \cos(\phi),$$

где γ - скорость сдвига, ϕ - текущий угол поворота частицы относительно оси y .

На расстоянии l от центра выделен элемент стержня dl . Его окружная скорость

$$\vec{U}_\omega = \omega \cdot l \cdot (\vec{e}_x \cdot \cos(\phi) - \vec{e}_y \cdot \sin(\phi)),$$

где ω - мгновенная угловая скорость частицы.

Тогда, скорость обтекания элемента dl

$$\vec{V} = \vec{U}_\gamma - \vec{U}_\omega.$$

Модуль скорости обтекания линейно зависит от координаты l :

$$|\vec{V}| = l \cdot \sqrt{\cos^2(\phi) \cdot (\gamma - \omega)^2 + \omega^2 \cdot \sin^2(\phi)}, \quad (1)$$

а угол между осью стержня и вектором относительной скорости жидкости не зависит от l и составляет:

$$\sin(\theta) = \frac{\gamma \cdot \cos^2(\phi) - \omega}{\sqrt{\cos^2(\phi) \cdot (\gamma - \omega)^2 + \omega^2 \cdot \sin^2(\phi)}} \quad (2)$$

Таким образом, в системе координат частицы, она находится в динамически меняющемся по скорости и направлению сдвиговом потоке (Рис.2).

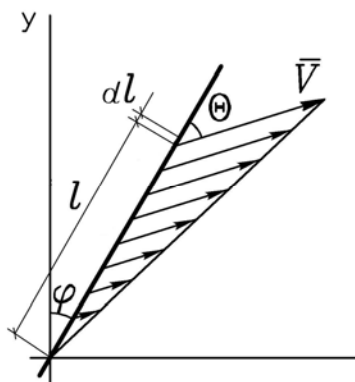


Рис.2

Сила, действующая на элемент, направлена по вектору скорости его обтекания:

$$dF = f \cdot \sin(\theta) \cdot dl, \quad (3)$$

где f - удельная по длине стержня сила действующая со стороны потока. Момент действующих сил относительно центра частицы

$$M = 2 \cdot \sin^2(\theta) \cdot \int_0^L f \cdot l \cdot dl, \quad (4)$$

Для определения удельной силы воспользуемся методикой расчета разработанной Калгамом и Кэном [6]:

$$f = C_D \cdot a \cdot \rho \cdot V^2, \quad (5)$$

где суммарный коэффициент сопротивления C_D складывается из коэффициента сопротивления трения и коэффициента сопротивления давления

$$C_D = C_{Df} + C_{Dp}, \quad (6)$$

$$C_{Df} = \frac{1.353 + 4.43 \cdot \varepsilon^{1.35}}{\sqrt{\text{Re}_L}}, \quad (7)$$

$$C_{Dp} = (1.153 + 1.26/\text{Re}_L) \cdot \varepsilon^{0.95}. \quad (8)$$

Здесь

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1 + \sin^2(\theta) \cdot (r^2 - 1)}{r}} \quad (9)$$

соотношение осей эллипса сечения стержня в плоскости включающей в себя вектор скорости обтекания и параллельной вектору угловой скорости. $\text{Re}_L = H \cdot \rho \cdot V / \mu$ - критерий Рейнольдса рассчитанный для характерного размера эллиптического сечения :

$$H = 4 \cdot a \cdot E(e) / \pi,$$

где $a = d / \varepsilon$ - большая ось эллипса, $E(e)$ - полный эллиптический интеграл второго порядка.

Дифференциальное уравнение движения частицы в координатах ее центра масс по второму закону Ньютона имеет вид:

$$J \cdot \ddot{\phi} = M(\phi, \dot{\phi}) \quad (10)$$

где $M(\phi, \dot{\phi})$ - полный момент вычисленный с помощью уравнений (1-9). Момент инерции стержня относительно центра:

$$J = \frac{16}{9} \xi \cdot \rho \cdot \pi \cdot d^2 \cdot L^3$$

здесь ξ - отношение плотности частицы к плотности жидкости.

Анализ результатов

Для решения дифференциального уравнения движения (10) использовался численный метод Рунге-Кутты. На рисунке 3 приведен график изменения положения стержня во времени, из которого видно, что движение частицы носит периодический характер, в отличие от модели Джеффри, где у длинных частиц происходит полная остановка в горизонтальном положении.

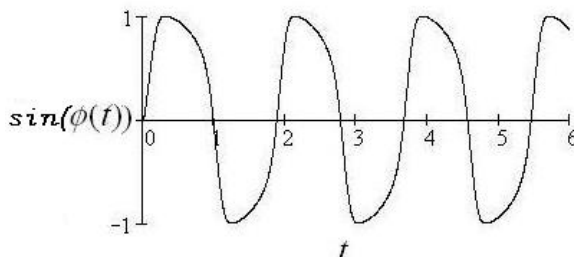


Рис. 3

Данный результат объясняется тем, что введенная в модель инерция позволяет частице, имея запас кинетической энергии проходить горизонтальную зону отсутствия момента сил трения.

На рисунке 4 в полярных координатах представлена зависимость угловой скорости частицы от угла ее поворота. Из этого графика видно, что помимо отсутствия нулевой скорости у частицы имеет место смещение угла достижения максимальной и минимальной угловой скорости, что неоднократно наблюдалось экспериментально [5]. Соответственно и график вероятности углового положения частицы не симметричен относительно $\phi = \pi/2$ (Рис.5).

ДВИЖЕНИЕ ОДИНОЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В СДВИГОВОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

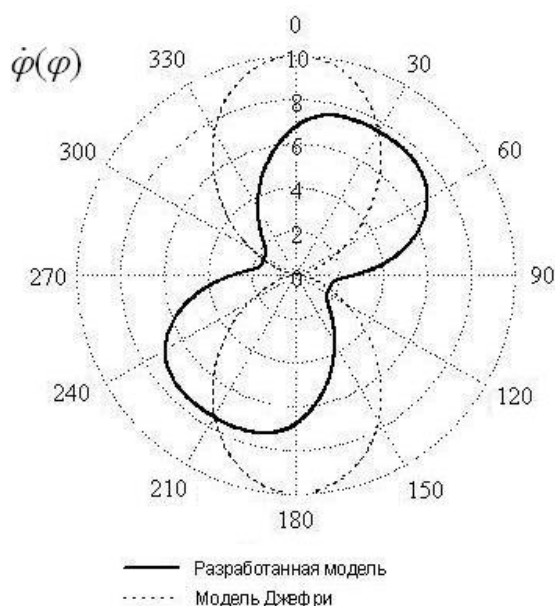


Рис. 4

Распределение скорости по углу поворота для инерционной частицы носит более равномерный характер. Был просчитан случай высокой инерционности стержня ($\xi = 10$), в таких условиях движение происходит с практически постоянной скоростью. Полученные результаты, описывающие характер поведения частицы соответствуют экспериментальным наблюдениям [7].

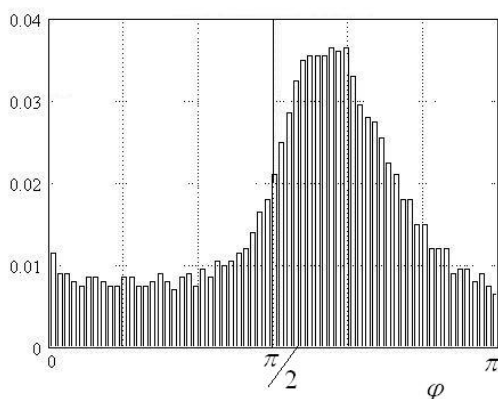


Рис.5

Выводы

Разработанная модель движения стержня более точно и полно описывает поведение реальных частиц, чем прочие известные модели, что позволяет использовать ее в дальнейшем для исследования свойств волокнистых суспензий.

Список литературы

1. G.B. Jeffery, The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. Proc. Royal Soc. London. Ser. A 102(161), 1922.
2. A. Fernandez, Preferred orientation developed by rigid markers in two-dimensional simple shear strain: a theoretical and experimental study. Tectonophysics Vol. 136, 151-158, 1987.
3. J.M. Stockie, Analysis and computation of immersed boundaries, with application to pulp fibres. PhD thesis, Institute of Applied Mathematics, University of British Columbia, Vancouver, BC, Canada, 1997.
4. C.J.S. Petrie, The rheology of fibre suspensions. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 87, 369-402, 1999.
5. C.A. Stover, D.L. Koch, and C. Cohen. Observation of fibre orientation in simple shear flow of semi-dilute suspension. J. Fluid Mech., 238:277-296, 1992.
6. W.A. Khan, J.R. Culham, and M.M. Yovanovich, Fluid flow around and heat transfer from elliptical cylinders: analytical approach. J. Thermophysics and Heat Transfer, Vol.19, No.2, 178-185, 2005.
7. S.G. Mason, R.St.J. Manley, Particle motions in sheared suspensions: orientations and interactions of rigid rods. Proc. Royal Soc. London, A238, 117-131, 1957.